Інженерні розрахунки на ПЕОМ: навч. посіб. / Д.Е. Сідоров, І.О. Казак – К.: НТУУ «КПІ», 2015. – 185 с.

# 4. ОСНОВИ МОДЕЛЮВАННЯ

## 4.1. Розв'язання диференційних моделей на базі звичайних диференційних рівнянь за методом Ейлера

Метод Ейлера може бути використаний для відшукання наближеного рішення (розв'язання задачі Коші) звичайних диференційних рівнянь.

Нехай дано диференційне рівняння першого порядку у вигляді:

$$y'=f(x, y),$$

з початковими умовами $y(x_0)=y_0$, на відрізку $x$ від $x_0$ до $x_n$.

Розібємо розглянутий відрізок на частини з кроком $h$. Тоді дискретна координата може бути знайдена за залежністю:

$$x_i = x_0 + ih\,,$$

де $i$ = 0, 1, 2…n – номер вузла розрахункової сітки.

Згідно методу Ейлера, замість отримання аналітичної функції $y(x)$ можна знайти її табличний аналог $y_i$ у вузлах сітки $i$. Послідовні значення табличної функції $y_{i+1}$ в наступному вузлі $(i+1)$ визначаються за її відомим значенням $y_i$ у вузлі $i$ за рекурентною формулою Ейлера:

$$y_{i+1}= y_i+ h\cdot f(x, y)+\varepsilon_i,$$

де $\varepsilon_i = y_{i+1} - y(x_{i+1})$ – вузлова похибка методу Ейлера.

В якості правої частини $f(x, y)$ диференційного рівняння у формулі Ейлера може також служити її дискретний аналог $f(x_i, y_i)$.

Похибка, яка накопичена на всьому розрахунковому відрізку:

$$\varepsilon = \sum_{1}^{n} \varepsilon_i\ .$$

Якщо $|\varepsilon_i|$ та $|\varepsilon|$ дуже малі в порівнянні з власне значеннями $y_i$ і не впливають на кінцеву інтерпретацію результатів розрахунку, то отримане приблизне рішення

Інженерні розрахунки на ПЕОМ: навч. посіб. / Д.Е. Сідоров, І.О. Казак – К.: НТУУ «КПІ», 2015. – 185 с.

у вигляді табличної функції $y_i$ вважається збіжним до аналітичної залежності $y(x)$ у відповідних вузлах $i$. Таким чином, для розрахунків використовують рекурентну формулу Ейлера у вигляді:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x, y).$$

Якщо $|\varepsilon_i|$ зростає при просуванні по розрахунковому відрізку, то виникає, так звана, нестійкість рішення, яка призводить до незбіжності табличної функції $y_i$ до аналітичної залежності $y(x)$. Значення $|\varepsilon_i|$ та $|\varepsilon|$ набувають величин, які близькі або навіть перевищують величину функції $y_i$., яку знаходять. Таке рішення цінності не має і не може бути застосовано в інженерних розрахунках.

Розглянутий звичайний метод Ейлера має перший порядок точності відносно кроку. Це означає, що $\varepsilon_i \sim h$. Тобто, при збільшенні вдвічі кроку (наприклад, з метою економії обчислювальних ресурсів), вдвічі збільшується і похибка $\varepsilon_i$ і навпаки. Звідси випливає метод усунення нестійкості за рахунок зменшення кроку розрахунку.